A few methods for obtaining integrable couplings

摘要：本报告的主要内容是获得可积耦合的方法。

情形 1：可积系统 $u_t = K(u)$ 由 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 或其子代数得到.

方法：将 $\tilde{A}_1$ 扩展为 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数 $\tilde{G}$，且存在 $\tilde{G}$ 的两个子代数 $\tilde{G}_1$ 和 $\tilde{G}_2$，满足：

(i) $\tilde{G} = \tilde{G}_1 \oplus \tilde{G}_2, \tilde{G}_1 \cong \tilde{A}_1$;

(ii) $[\tilde{G}_1, \tilde{G}_2] \subset \tilde{G}_2$.

情形 2：可积系统 $u_t = K(u)$ 由 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的子代数生成.

方法：将 $\tilde{A}_2$ 的子代数等价地（相对于换位运算而言）变换为 $\tilde{A}_1$ 的子代数，再利用情形 1 的方法求可积耦合.

情形 3：构造一类不同于 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的新的 loop 代数，由此求多分量可积耦合系统.

如：$G_M = \{a = (a_{ij})_{M\times 3} = (a_1, a_2, a_3)\}, a_i = \left(a_{i1}, \cdots, a_{iM}\right)^T, i = 1,2,3.$

定义其换位运算为：

$$[a,b] = (a_2 * b_3 - a_3 * b_2, 2(a_1 * b_2 - a_2 * b_1), 2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3)),$$

其中 $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2 b_3)^T$,$*$ 运算定义为： $a * b = b * a = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3)^T$

定义 $\tilde{G}_M = \{a\lambda^m, a \in G_M, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}, [a\lambda^m, b\lambda^n] = [a,b]\lambda^{m+n}, \forall a,b \in G_M$. 则 $\tilde{G}_M$ 为一个 loop 代数.

定义

$$F_M = \{a = (a_{ij})_{M\times 5} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\},$$

$$\begin{aligned}[a,b] = (&a_2 * b_3 - a_3 * b_2, 2(a_1 * b_2 - a_2 * b_1), 2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3), a_1 * b_4 - a_4 * b_1 \\ &+ a_2 * b_5 - a_5 * b_2, a_3 * b_4 - a_4 * b_3 + a_5 * b_1 - a_1 * b_5),\end{aligned}$$

这里 $a,b \in F_{M.}$

设 $\tilde{F}_M = \{a\lambda_n, a \in F_M, n = 0, \pm 1, \cdots\}, [a\lambda^m, b\lambda^n] = [a,b]\lambda^{m+n}, \forall a,b \in F_M$. $\tilde{F}_M$ 的二个子代数定义为：$\tilde{F}_M(1) = \{(a_1, a_2, a_3, 0, 0)\lambda^n\}, \tilde{F}_M(2) = \{(0,0,0,a_4,a_5)\lambda^n\}$, 则

(1) $\tilde{F}_M(1) \cong \tilde{G}_M, \tilde{F}_M = \tilde{F}_M(1) \oplus \tilde{F}_M(2)$;

(2) $[\tilde{F}_M(1), \tilde{F}_M(2)] \subset \tilde{F}_M(2)$.

利用上面的方法，可获得一些可积系统的可积耦合系统。